УДК 517.95

УМОВИ КОЛИВНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ КЛАСІВ РІВНЯНЬ З ОПЕРАТОРОМ ЛАПЛАСА-БЕЛЬТРАМІ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ЗАДАЧ В НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

Добротвор І.Г.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

Питання коливності розв'язання рівнянь, що описують технічну модель, пов'язані, як правило, із вивченням проблеми розв'язуваності крайових задач. Використовуючи поняття «середнього значення», в просторах з постійною кривизною дають можливість дослідити на коливність деякі типи рівнянь у частинних похідних. Встановлено достатні умови коливності розв'язків деяких класів диференціальних рівнянь у частинних похідних з оператором Лапласа-Бельтрамі парного порядку у просторах постійної кривизни. Зазначено також властивості, які забезпечують умови коливності розв`язків рівняння, що залежать лише від радіальної складової.

Ключові слова: *рівняння, нерівність, коливність, частинна похідна, модель, середнє значення, кривизна, область.*

Постановка проблеми. Великий клас задач техніки, фізики та математики моделюється співвідношеннями, змінні параметри яких належать просторам постійної кривизни. Зазвичай під ними розуміють простори з евклідовою геометрією, але ще на початку XIX століття було введено в розгляд й інші простори з кривизною, відмінною від нуля та постійною у всіх точках простору. Геометрії таких просторів називають гіперболічними та сферичними. Бельтрамі довів несуперечливість неевклідових геометрій, реалізувавши їх як внутрішні геометрії добре відомих поверхонь евклідового простору [1]. У випадку гіперболічної геометрії – це псевдосфера, кривизна якої від'ємна, у випадку сферичної геометрії – звичайна сфера з постійною додатною кривизною. Значний інтерес і дослідження в просторах постійної кривизни дозволили ввести в розгляд ріманові многовиди довільної розмірності та довільної постійної кривизни.

Математичні моделі, що виникають при розв'язанні проблем оцінок фізичних і технічних характеристик деяких реальних процесів, описуються диференціальними рівняннями, параметри яких змінюються у просторах постійної кривизни. У даній роботі будемо використовувати простори: E^n – евклідовий , H^n – лобачевського, S^n – рімановий; n – у всіх випадках вказує на розмірність простору. Не обмежуючи загальності, в подальшому будемо вважати кривизну просторів H^n та S^n рівними відповідно –1 та +1.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Важливою проблемою ряду технічних задач є питання коливності розв'язків рівнянь, що описують модель [2]. Це питання пов'язане, як правило, із вивченням проблеми розв'язуваності крайових задач. Особливо природною постановкою є крайові задачі для диференціальних рівнянь другого порядку, оскільки перетворення в нуль їх розв'язків вказує на можливість розв'язуваності відповідної задачі. Це дозволяє узагальнити поняття коливності на системи диференціальних рівнянь або на рівняння з частинними похідними із змінними, що належать областям просторів постійної кривини. При цьому для звичайних диференціальних рівнянь використовується означення коливності розв'язку на нескінченному інтервалі: коливними розуміють розв'язки із нескінченною кількістю нулів і неколивними у противному випадку [3–5].

У роботах [6–10] для дослідження коливності рівнянь з частинними похідними еліптичного типу, в головній частині якого стоїть оператор Лапласа або його ступінь, використовувалось осереднене значення по сферах у необмеженій області $\Omega \subset E^n$ (E^n – n-вимірний евклідовий простір). Використовуючи поняття «середнього значення» у просторах із постійною кривизною [1], цим прийомом можна дослідити на коливність і деякі типи гіперболічних рівнянь.

Мета роботи. Метою роботи є встановлення достатніх умов коливності розв'язків деяких класів диференціальних рівнянь у частинних похідних із оператором Лапласа-Бельтрамі парного порядку у просторах постійної кривизни. Розглянемо неоднорідне рівняння четвертого порядку із змінними коефіцієнтами:

$$L^2u + c_1(x, Lu)\operatorname{sgn} u + c_0(x,u) = f(x), \tag{1}$$

тут $L^2u = L(Lu)$,

$$L = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} g^{ij}\sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\right). \tag{2}$$

оператор Лапласа-Бельтрамі.

У позначеннях (2) $g_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ – тензор, що задає простір X, $g^{ij}\cdot g_{jk} = \delta_{ik}$, δ_{ik} – символ Кронекера, $g = \left|\det g_{ij}\right|$. Відносно функцій $c_1(x,\upsilon)$ і $c_0(x,u)$ будемо припускати, що вони визначені і неперервні на всьому просторі $X \times R^1$, $f(x)$ – визначена та неперервна на X.

Результати досліджень. Використовуючи полярно-геодезичні координати, легко довести формулу:

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{S_r}\ldots\int Lu ds = \frac{d}{dr}\left(A(r)\frac{dM}{dr}\right), \tag{3}$$

де $M_r(u)$ – оператор осереднення:

$$M_r[u(x), p_0] = \frac{1}{A(r)}\int_{S_r}\ldots\int u(x)ds, \tag{4}$$

по «сфері» S_r відповідного простору з центром у точці P_0, $A(r)$ – «площа» S_r, що обчислюється по формулах $\omega_n r^{n-1}$ і $\omega_n\cdot\left(sh\sqrt{-k}r/\sqrt{-k}\right)^{n-1}$ для евклідового і гіперболічних просторів відповідно. Далі, не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $k = -1$ для H^n.

Визначення. Розв'язання $u(x)$ рівняння (1) називатимемо коливним в необмеженій області $\Omega \subset X$, якщо для будь-якого r $M_r[u(x), P_0]$ обертається в нуль в області $E_r \cap \Omega$, $E_r = \{x : |x| \ge r\}$. Введемо позначення:

$$F(r) = \frac{1}{A(r)}\int_{S_r}\ldots\int f(x)ds.$$

Теорема 1. Нехай задано рівняння (1) і задовольняються такі умови:

а) $c_0(x,-u) = -c_0(x,u)$, $c_1(x,-\upsilon) = -c_1(x,\upsilon)$ для всіх x та $u > 0$, $\upsilon > 0$;

б) $c_0(x,u) \ge p_0(r)\cdot f_0(u)$, $c_1(x,\upsilon) \ge p_1(r)\cdot f_1(\upsilon)$, де $u > 0$, $\upsilon \in R^1$, $p_0(r)$ і $p_1(r)$ – неперервні додатні функції на $[0,\infty)$, функція $f_0(u)$ – неперервна, додатна опукла на $(0,\infty)$, $f_1(\upsilon) \ge 0$ – неперервна функція, парна на $(-\infty,\infty)$ і не спадна на $(0,\infty)$. Тоді, якщо диференціальні нерівності:

$$(A(r)(A^{-1}(r)(A(r)y')')')' + A(r)\cdot p_2(r)\cdot f_1(A^{-1}(r)(A(r)y')') +$$
$$+ A(r)\cdot p_0(r)\cdot f_0(y) \le \pm A(r)F(r)$$

не мають додатних розв'язків на $[r_0,\infty)$ для деякого $r_0>0$, то рівняння (1) має властивість коливальності.

На основі вивчення властивостей диференціальних нерівностей більш загального вигляду, ніж (5), приходимо до твердження.

Теорема 2. Нехай задана нерівність:

$$(L_3 y)' + q(r)(f_0(y) + s(r)\cdot f_1(L_2 y)) + h(r) \le 0\,, \tag{6}$$

де $L_3 y = P_1(r)(L_2 y)'$, $L_2 y = P_2(r)(P_1(r)y')'$, функції $P_1(r)$, $P_2(r)$, $q(r)$, $s(r)$, $h(r)$ – визначені і неперервні на $[a,\infty)$, $a>0$; $f_0(u)$ і $f_1(\upsilon)$ також визначені і неперервні на інтервалах $(0,\infty)$ і $(-\infty,\infty)$ відповідно і задовольняються умови:

а) $P_1(r)>0$, $P_2(z)>0$, $r\in[a,\infty)$

$$\int_a^\infty \frac{dr}{P_1(r)} = \infty\,,\ \int_a^\infty \frac{dr}{P_2(r)} = \infty\,; \tag{6}$$

б) $q(r)>0$;

в) $\int_b^\infty q(r)\int_{r_0}^{r}\frac{dp_1}{P_1(p_1)}\int_{r_0}^{p_1}\frac{dp_2}{P_2(p_2)}\int_{r_0}^{p_2}\frac{dp_3}{P_1(p_3)},\ dr=\infty,\ b>a$;

г) $f_o(u)$ – додатна і неспадна на $(-\infty,\infty)$ функція, для якої

$$\int_a^\infty \frac{dz}{f_0(z)} < \infty\,,\ a>0\,;$$

д) $f_1(\upsilon)$ – невід'ємна на $(-\infty,\infty)$ функція й існує дійсне λ таке, що

$$s(r)\cdot f_1(\upsilon) \ge \lambda\cdot s(r) \ge -h(r)$$

для всіх $r>r_0$ і $\upsilon\in R^s$, тоді диференціальна нерівність (6) не має додатних розв'язків на $[r_0,\infty)$.

Повертаючись до вихідного рівня (1), на основі попередніх тверджень, а також теорем із роботи [5] про канонічні форми несамоспряжених операторів, приходимо до таких достатніх ознак коливності в просторах E^n і H^n.

Теорема 3. Рівняння (1) має властивість коливності у просторі E^n ($n\ge 2$), якщо:
а) виконуються умови а) і б) теореми 1, умова г) теореми 2;
б) існує дійсне $\lambda>0$ таке, що для всіх $r>r_0>a$ і $\upsilon\in R^1$ має місце співвідношення

$$f_1(\upsilon) \ge \lambda \ge \frac{F(r)}{P_1(r)} \ge -\lambda\,;$$

в) якщо $n\ge 3$, то $f_0(u_1,u_2) > g(u_1)\cdot f_0(u_2)$ для всіх u_1, u_2 таких, що $0<u_1<1<u_2$, $g(u)$ – неперервна і додатна функція на $(0,\infty)$;

г) $\int\limits_1^\infty r^3 p_0(r)\ln r dr=\infty$, $n=2$;

$$\int\limits_1^\infty r^{n+1}p_0(r)\cdot f_0(cr^{2-n})dr=\infty \text{; для всіх } c>0,\ n\geq 3.$$

Теорема 4. Рівняння (1) має властивість коливності у просторі H^n $(n\geq 2)$, якщо:
а) виконуються умови а), б) і в) теореми 3 для $n\geq 2$;
б) існує $a>0$ таке, що

$$\int\limits_a^\infty sh^3 r\ln\left(Hth\frac{r}{2}\right)p_0(r)g\left(c\ln\left(Hth\frac{r}{2}\right)\right)dr=\infty;\quad n=2;$$

$$\int\limits_a^\infty rsh^{2n-2}rQ(r)p_0(r)g(cQ(r))dr=\infty,\ n>3,$$

для всіх $c>0$, $H=cth\dfrac{a}{2}$, $Q(r)=\int\limits_a^1 sh^{1-n}pdp$.

Зауваження. Частковим випадком рівняння (1) буде рівняння:

$$L^2u+c(x,u)=f(x), \tag{7}$$

для якого умови коливності всіх розв'язків досліджувались в роботах [4, 5] у випадку евклідового простору. Одержані результати можна перенести на відповідні однорідні рівняння.

Теорема 5. Нехай $f(x)\equiv 0$ у рівнянні (7) і задовольняються наступні умови:
а) $c\ (x,-u)=-c\ (x,u)$, для всіх x та $u>0$;
б) $c(x,u)\geq p(r)\cdot f(u)$, де $u>0$ і $p(r)$– неперервна додатна функція на $[0,\infty)$, функція $f(u)$– неперервна, додатна опукла на $(0,\infty)$. Тоді, якщо диференціальні нерівності

$$(A(r)(A^{-1}(r)(A(r)y')')')'+A(r)\cdot p(r)\cdot f(y)\leq 0$$

не має додатних розв'язків на (r_0, ∞) для деякого $r_0>0$, то рівняння (7).

Розглянемо тепер коливні властивості рівняння , що є частинним випадком (7).

$$\Delta W+q(X)W=0, \tag{8}$$

тут $\Delta-$оператор Лапласа, $q(X)-$кусково-неперервна функція в деякій області D, що містить нескінченно віддалену точку простору R^3.

У тороїдальній системі координат для розв'язків (7), що залежать лише від радіальної складової $r=a\,ctg\tau$, рівняння (7) приймає вигляд у самоспряженій формі [6]:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{sh\tau}{sh\tau-\delta}\frac{dW}{d\tau}\right)+\frac{a^2sh\tau}{(ch\tau-\delta)^3}q(\tau)W=0, \tag{9}$$

де: $\alpha\leq\tau\leq\infty,\quad |\delta|\leq 1.$

Позначимо: $Q(t)=\int\limits_\alpha^t\dfrac{a^2q(\tau)sh\tau\,d\tau}{(ch\tau-\delta)^3}$ і $S(\lambda)=\{t\in[\alpha;a):Q(t)\geq\lambda\}$.

Для тороїдальних областей має місце наступне твердження.

Теорема 6. Нехай задано рівняння (7). Тоді:

а) якщо існує зростаюча послідовність чисел: $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$; $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$, така, що виконується умова $\lambda_n \cdot \int\limits_{S(\lambda_n)} \left(\dfrac{sh\tau - \delta}{sh\tau} \right) d\tau \geq 1$, в такому випадку рівняння (9) коливне.

б) якщо $\int\limits_{S(\lambda)} \dfrac{sh\tau - \delta}{sh\tau} d\tau = \infty$ для всіх λ>0, то (9) коливне.

в) нехай $\delta = 0$. Якщо для деякого λ множина $S(t)$ має скінченну міру, але для деякого $\mu \in (0;1)$ $\int\limits_{S(\lambda)} Q^{\mu}(t)\, dt = 0$, тоді (9) є коливним.

Зауваження. Зазначені властивості забезпечують умови коливності розв`язків рівняння (8), що залежать лише від радіальної складової. Виконання умов $sh\tau \cdot q(\tau) \neq 0$ і $\operatorname{Re}\sqrt{-q(\tau)} \geq 0$ в області $D \subset R_0^3 = R^3 \setminus K\,[r_0;0]$ для рівняння (2) дозволяє виписати головні члени асимптотики розв`язків рівняння (9):

$$U_{1,2} = \frac{ch\tau - \delta}{\sqrt{ch\tau} \cdot \sqrt[4]{-q(\tau)}} \exp\left(\pm a \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \frac{\sqrt{-q(\tau)}}{ch\tau - \delta} d\tau \right) \left(1 + O\left(\tau^{-1}\right)\right).$$

Висновки. Отримані достатні умови коливних властивостей розв'язків деяких типів диференціальних рівнянь другого та четвертого порядків із частинними похідними у просторах постійної кривизни: евклідовому, гіперболічному та в тороїдальній системі координат.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Хелгасон С. Преобразование Радона. – М. : Мир, 1983. – 140 с.
2. Дослідження динаміки структуроутворення епоксикомпозитів на багатовимірних просторових формах / І. Г. Добротвор. // Збірник наукових праць Кіровоградського національного технічного університету. – Вип. 21. – Кіровоград, 2008. – С. 6-12.
3. Baider A., Feldman E.A. On oscillatory elliptic equations on manifolds // Trans Amer. Math. Soc. – 1980. – 258. – № 2. – P. 495-504.
4. Kusano T., Naito M. Oscillation criteria for general linear ordinary differential equations // Pacific J. Math. – 1981. – 92. – P. 345-355.
5. Иванов А. Ф. Колеблемость решений одного класса функционально-дифференциальных уравнений первого порядка нейтрального типа / А. Ф. Иванов, Т. Кусано // Укр. мат. журн. – 1989. – Т. 41. – № 10. – С. 1370-1375.
6. Nowakowska W., Werbowski W. On connections between oscillatory solutions of functional, difference and differential equations // Fascilicul mathematici. – 2010. – Nr. 43. – P. 95-106.
7. Rongcong X. A note on the oscillationof second-order nonlinear neutral functional differential equations / X. Rongcong, X. Younghui // Int. J. Contemp. Math. Sciences. – 2008. – Vol. 3. – No. 29. – P. 1441-1450.
8. Çakmak D. Oscillation criteria for nonlinear second order differential equations with damping // Укр. мат. журн. – 2008. – Т. 60. – № 5. – С. 694-700.
9. Thandapani E. Oscillation criteria for second-order nonlinear impulsive differential equations with perturbation // International Journal of pure and applied mathematics. – 2014. – Vol. 94. – No. 2. – P. 163-174.

10. Grase S. R. Oscillation of some fourth-order difference equations / S. R. Grase, R. P. Agarwal, M. Bohner, S. Pinelas // International Journal of difference equations. – 2011. – Vol. 6. – N. 2. – P. 105-112.

REFERENCES

1. Khelgason S. Preobrazovanie Radona. – M. : Mir, 1983. – 140 s.
2. Doslidzhennya dinamiki strukturoutvorennya epoksikompozitiv na bagatovimirnikh prostorovikh formakh / I. G. Dobrotvor. // Zbirnik naukovikh pracj Kirovogradsjkogo nacionaljnogo tekhnichnogo universitetu. – Vip. 21. – Kirovograd, 2008. – S. 6-12.
3. Baider A., Feldman E.A. On oscillatory elliptic equations on manifolds // Trans Amer. Math. Soc. – 1980. – 258. – № 2. – P. 495-504.
4. Kusano T., Naito M. Oscillation criteria for general linear ordinary differential equations // Pacific J. Math. – 1981. – 92. – P. 345-355.
5. Ivanov A. F. Koleblemostj resheniyj odnogo klassa funkcionaljno-differencialjnihkh uravneniyj pervogo poryadka neyjtraljnogo tipa / A. F. Ivanov, T. Kusano // Ukr. mat. zhurn. – 1989. – T. 41. – № 10. – S. 1370-1375.
6. Nowakowska W., Werbowski W. On connections between oscillatory solutions of functional, difference and differential equations // Fasciliculi mathematici. – 2010. – Nr. 43. – P. 95-106.
7. Rongcong X. A note on the oscillationof second-order nonlinear neutral functional differential equations / X. Rongcong, X. Younghui // Int. J. Contemp. Math. Sciences. – 2008. – Vol. 3. – No. 29. – P. 1441-1450.
8. Çakmak D. Oscillation criteria for nonlinear second order differential equations with damping // Ukr. mat. zhurn. – 2008. – T. 60. – № 5. – S. 694-700.
9. Thandapani E. Oscillation criteria for second-order nonlinear impulsive differential equations with perturbation // International Journal of pure and applied mathematics. – 2014. – Vol. 94. – No. 2. – P. 163-174.
10. Grase S. R. Oscillation of some fourth-order difference equations / S. R. Grase, R. P. Agarwal, M. Bohner, S. Pinelas // International Journal of difference equations. – 2011. – Vol. 6. – N. 2. – P. 105-112.

Добротвор И.Г. УСЛОВИЯ КОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ ЛАПЛАССА-БЕЛЬТРАМИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЗАДАЧ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Проблемы колеблемости решений уравнений, которые описывают некоторые виды технической модели, как правило, дело с решением краевой задачи исследования. Проблема определения колеблемости и неколеблемости решений дифференциальных уравнений очень активная рассматривалась в последние три десятилетия. Проблема существования колебательных решений первого порядка дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументами были рассмотрены многими авторами. Большая группа инженерных задач по физике и математике описывается переменными, которые относятся к пространствам постоянной кривизны: Евклидово, гиперболические (Лобачевского) и Римана. Решение этого уравнения называется колебательным, если оно имеет бесконечную последовательность нулей, стремящуюся к бесконечности. В противном случае оно называется неколеблющимся.

Были получены достаточные условия колебательных свойств решений дифференциальных уравнений с частными производными постоянной кривизны пространств. Единственность решения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными второго и четвертого порядка, определяются преобразованием их решений в нуль и свидетельствует о возможности соответствующих решений проблемы. Основной инструмент исследования был основан на использовании средних значений на n-мерной области в соответствующем пространстве. Используя понятие концепции «среднее значение» в пространствах с постоянной кривизной делает возможным изучение колеблемости некоторых типов уравнений в частных производных. Отдельные исследования проводились для решений, которые зависят от радиального параметра. Это позволило привести исследование дифференциальных уравнений в частных производных к свойствам обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе показано несколько теорем и следствий в плане свойств колебаний. Получены достаточные условия колеблемости решений некоторых классов дифференциальных уравнений с оператором Лапласа-

Бельтрами четного порядка в пространствах постоянной кривизны. Были исследованы свойства решений самосопряженных уравнений исследуемых в тороидальных координатах системы в неограниченных областях. Свойства, которые обеспечивают условия колебаний уравнения, зависящих только от радиальной составляющей, были исследованы в данной статье. Полученные результаты могут быть использованы для оценки физико-механических характеристик композиционных материалов и покрытий на их основе.

Ключевые слова. *Уравнение, неравенство, колеблемость, частная производная, модель, среднее значение, кривизна, область.*

Dobrotvor I.G. OSCILLATORY CONDITIONS OF SOME CLASSES EQUATIONS SOLUTIONS WITH LAPLASE-BELTRAMY OPERATOR AT DESIGN PROBLEMS IN UNLIMITED AREAS

The problems of oscillation equations solutions that describe some kinds of technical model, as a rule deal with boundary problem solutions study. The problem of determining the oscillation and nonoscilllatin of solutions of differential equations has been a very active area in the last three decades. The problem of existence of oscillatory solutions of the first order differential equations with deviating arguments has been considered by many authors. A large group of engineering tasks in physics and mathematics is described by variables that belong to permanent curvature spaces: the Euclidean, hyperbolic (Lobachevsky) and Ryman. A solution of this equation is called oscillatory if it has an infinite sequence of zeros tending to infinity. Otherwise it is called nonoscillatory.

Sufficient conditions of oscillation properties for the solutions of differential equations with partial derivatives in the constant-curvature spaces have been obtained. Uniqueness of boundary value problems solutions for differential equations with partial derivatives of the second and fourth order, determined by the transformation of their solutions in the zero and suggests the possibility of appropriate solutions to the problem. The main research tool was based on the use of average values on the n-dimension sphere in the appropriate space. Using a notion «mean value» concept in spaces with permanent curvature makes possible to investigate on oscillation some types of equations in the partial derivatives. Separate studies were conducted for solutions, which depend on the radial parameter only. This allowed to reduce the study of partial differential equations properties to ordinary differential equations ones. Several theorems and consequences are well-proved in terms of oscillation. Sufficient conditions of some classes differential equations oscillation conditions solutions with the Laplace – Beltramy operator of the even order in the spaces of permanent curvature have been found. Properties of selfadjoint form equations solutions are investigational in the thoroidal coordinates system in unlimited areas have been investigated. Properties, that provide the terms of oscillation conditions of equation, that depend only on a radial constituent, have been studied in the article. The obtained results can be used for the evaluation of physical-mechanical characteristics of composites and coatings based on them.

Keywords: *equation, inequality, oscillation, partial derivative, model, mean value, curvature, area.*

Статтю прийнято
до редакції 04.03.15