УДК: 629.056.6: 629.056.8 (045)

ПІДВИЩЕННЯ ШВИДКОДІЇ ОБРАХУНКІВ ІНТЕГРОВАНОЇ НАВІГАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ ЗА РАХУНОК ЕКОНОМНОГО МЕТОДУ ОБЕРТАННЯ МАТРИЦЬ

Ільницька С.І.
Національний авіаційний університет, м. Київ

Не зважаючи на велику кількість публікацій, присвяченим інтегрованим навігаційним системам та методам обертання матриць, мало уваги приділяється технічним аспектам питання швидкодії таких систем. Основною метою даної роботи є дослідження можливостей підвищення швидкодії обрахунків в інтегрованій навігаційній системі шляхом використання покращеної процедури обертання трикутних матриць. В результаті практичної реалізації методів Гауса, Жордана-Гауса та запропонованого методу обертання трикутної матриці у вигляді функцій у програмному середовищі Code Warrior на мікропроцесорі із серії Freescale Kinetis K-60 було визначено, що порядок точності зберігається приблизно таким же для всіх методів, а за швидкодією запропонований метод дає виграш приблизно у 70–80 % у порівнянні з класичними методами Гауса та Жордана-Гауса відповідно. Дані результати можуть також бути використані при програмуванні алгоритмів інтегрованих навігаційних систем у конкретному апаратному забезпеченні. Зокрема, в нашому випадку було вирішено зупинитися саме на запропонованому методі обертання трикутних матриць.

***Ключові слова**: інтегровані навігаційні системи, метод обертання трикутних матриць.*

Вступ. Останні роки значна увага приділяється дослідженням та розробці відносно дешевих та малогабаритних навігаційних систем для використання в автомобілях, водних суднах, безпілотних літальних апаратах тощо. Важливе місце серед сучасних навігаційних систем займають глобальні навігаційні супутникові системи (ГНСС), що включають глобальну систему позиціонування GPS (США), глобальну навігаційну супутникову систему ГЛОНАС (Росія) та у перспективі – GALILEO (Європейський Союз). Це пояснюється високою точністю визначення часу, просторових координат, складових швидкості та глобальністю робочої зони. Проте, якщо крім координат і швидкостей необхідно забезпечити іще визначення параметрів орієнтації з високою частотою оновлення даних, бажано використовувати ГНСС у поєднанн з іншими системами. Комплексна обробка даних в інтегрованій навігаційній системі забезпечить її відповідність вимогам за точністю, доступністю, надійністю та цілісністю [1–4].

Актуальність досліджень. Інтегровані інерціально-супутникові навігаційні системи широко використовуються у світовій практиці через те, що вони працюють на різних фізичних принципах і дуже добре доповнюють одна одну. В результаті отримується інтегрована навігаційна система з розширеним набором навігаційних параметрів, високою частотою оновлення даних, хорошою коротко- та довготривалою точністю, підвищеною завадостійкістю, надійністю та цілісністю [3–6]. Отже, розробка та дослідження таких систем, і зокрема питання підвищення швидкодії їх роботи, є вельми актуальним питанням на даних час.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У наявних публікаціях немає інформації щодо специфічних методів обертання матриць в розрахунках інтегрованих навігаційних систем, особливо із вказуванням конкретного апаратного забезпечення, де ці розрахунки реалізовано. Є окремі публікації, присвячені методам обертання матриць. Зокрема, у роботі [7] представлено спосіб обертання матриці з використанням методу Холецького декомпозиції матриці. В іншій роботі [8] пропонується ітеративний алгоритм обертання матриць сьомого порядку, який розроблено спеціально для дуже погано обумовлених матриць, і який дає досить непогану точність обрахунків. Проте в даних публікаціях не зазначено, з якою ефективністю дані методи можуть бути впроваджені у сучасних мікропроцесорах.

Постановка задачі. В даній роботі ставиться задача по аналізу можливостей підвищення швидкодії обрахунків в інтегрованій навігаційній системі шляхом використання покращеної процедури обертання матриць та її апробації з використанням мікропроцесора Freescale Kinetis K-60.

Аналіз існуючих методів обертання матриць. Обертання матриць може здійснюватись з використанням багатьох різних методів, які можна поділити на два підвиди – прямі та ітеративні методи [9].

Прямі методи приводять до точного рішення після виконання певної кількості кроків. Проте таке твердження є справедливим лише для випадків, коли у нас є безкінечна точність. А оскільки в обрахунках використовується обмежена точність, то і рішення виходять приблизними і чутливими до похибок округлення. Ефект таких неточностей значно посилюється в задачах, де виконується багато різних маніпуляцій з матрицями.

Ітеративні методи, з іншого боку, покращують наступні наближення до тих пір, доки рішення не зійдеться до бажаного результату. Ітеративні методи широко використовуються для матричних обрахунків, особливо для великих систем, оскільки ці методи є більш простими, робастними до чисельних похибок, і потребують менше пам’яті у порівнянні із прямими методами. Проте швидкість збіжності залежить від точності початкового наближення. Слід зазначити, що рішення, отримане за допомогою ітеративних методів, теж є приблизним, проте ефект похибок заокруглення тут є мінімальним.

Розглянемо деякі із *прямих методів* обертання матриць.

Для реалізації першого методу потрібно виконати таку послідовність дій:

1) Знайти визначник матриці A і переконатись, що $\Delta A \neq 0$, тобто матриця A не вироджена.

2) Скласти алгебраїчні доповнення матриці A_{ij} до кожного елементу матриці A і записати матрицю $A^* = A_{ij}$ з отриманих алгебраїчних доповнень.

3) Записати обернену матрицю відповідно до формули: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \left(A^*\right)^T$.

Слід зазначити, що даний метод знаходження оберненої матриці не є оптимальним для реалізації на комп’ютері, а при здійсненні обрахунків вручну є більш-менш зручним для матриць відносно невеликих порядків.

Для інших двох способів потрібно спочатку скласти розширену матриця C, що має такий вигляд: $C = \begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix}$, де E – одинична матриця того ж розміру, що і матриця A. Після цього за допомогою елементарних перетворень, що виконуються з рядками розширеної матриці, необхідно привести розширену матрицю до вигляду $\begin{bmatrix} E & A^{-1} \end{bmatrix}$, тобто зробити так, щоб матриця справа стала оберненою до початкової матриці A. До елементарних перетворень, які можуть тут бути застосовані, відносяться такі дії: зміна місць двох рядків; множення всіх елементів рядка на деяке число, що не дорівнює нулю; додавання до елементів одного рядка відповідних елементів іншого рядка, помножених на будь-який множник. Застосовувати перераховані елементарні перетворення можна різними способами. Розглянемо два найбільш поширені методи обертання матриць: Гауса і Жордана-Гауса.

Для застосування метода Гауса зручно, коли перший елемент першого рядка розширеної матриці дорівнює одиниці. Тому якщо є рядок, у якого перший елемент дорівнює одиниці, він міняється місцями з першим рядком. Якщо ж ні, то елементи першого рядка просто діляться на значення його першого елементу. Взагалі метод Гауса поділяється на два етапи: прямих хід (коли елементи під головною діагоналлю матриці стають нульовими) і зворотній хід (коли елементи над головною діагоналлю матриці стають нульовими). Більш детально про даний метод можна подивитись у [10, 11].

Метод Жордана-Гауса, на відміну від метода Гауса, здійснюється в один етап. Даний метод складається з таких дій: 1) послідовно обираються ключові елементи, що лежать на головній діагоналі матриці. Рядок і стовпчик розширеної матриці, на перетині яких знаходиться ключовий елемент, вважаємо також ключовими; 2) усі елементи ключового рядка діляться на ключовий елемент; 3) перетворення ключового стовпчика в одиничний з одиницею на місці ключового елемента. Одиничним вважається той стовпчик, у якого один елемент дорівнює одиниці, а всі інші є нульовими. Більш детально про метод Жордана-Гауса можна подивитись у [10, 11]. Принциповою його перевагою є стабільність. Недоліком є те, що він потребує зберігання двох матриць та маніпуляцій над ними одночасно. Щоправда, цей недолік відноситься також і до метода Гауса.

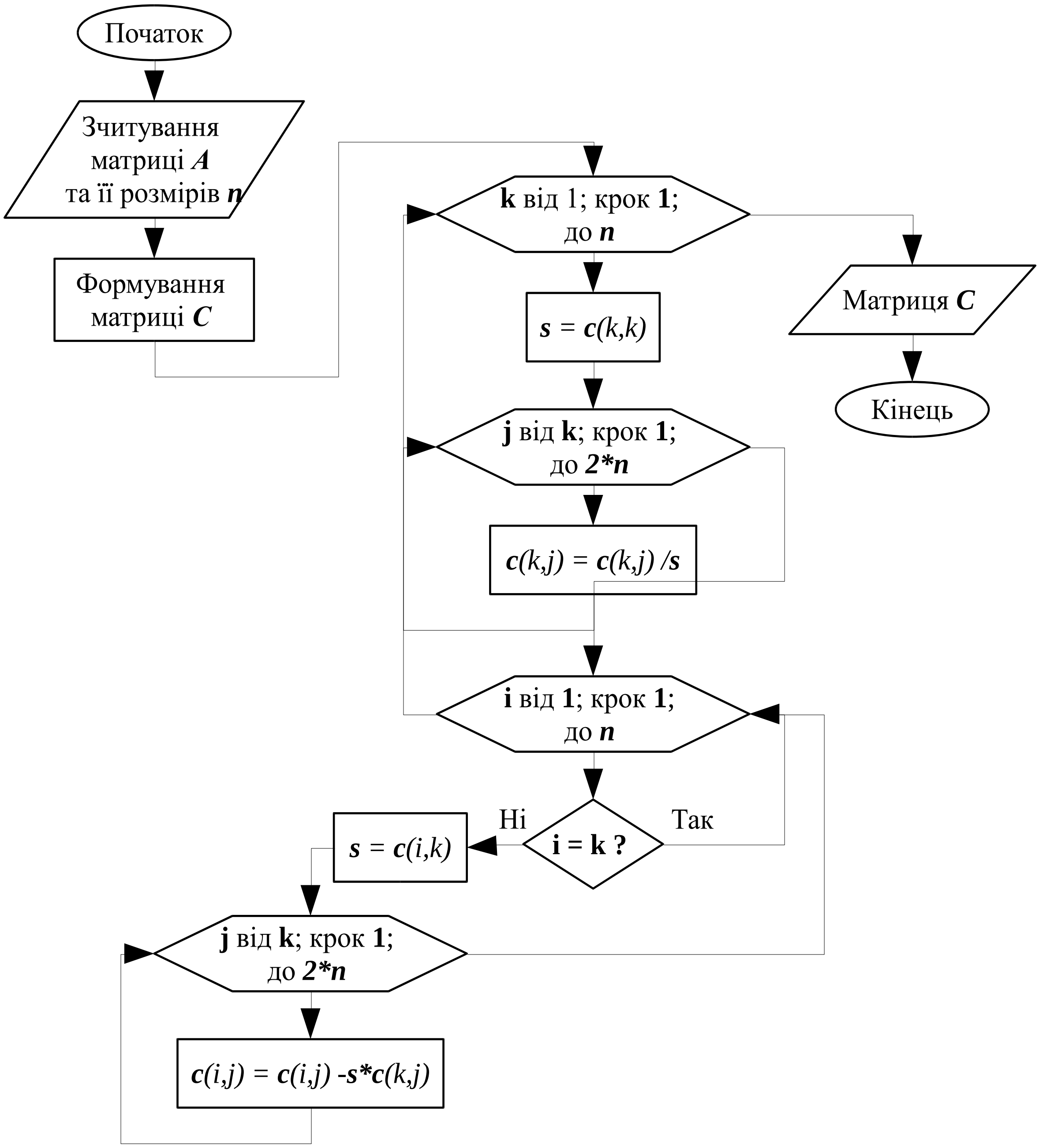

Рис. 1 – Блок-схема алгоритму обертання матриці за методом Жордана-Гауса

Рівняння інтегрованої навігаційної системи. Інтегрована навігаційна система функціонує таким чином, що спочатку обраховується рішення в безплатформній інерціальній навігаційній системі (БІНС), а потім воно коригується з використанням даних глобальної навігаційної супутникової системи (ГНСС) та інших датчиків [5, 12, 13]. Розглянемо більш детально момент корекції БІНС, оскільки саме там виконується процедура обертання матриці.

Вхідними даними блока коригування є дані про координати, швидкість та орієнтацію від БІНС, дані про координати та швидкість від ГНСС, матриця вимірювань і коваріаційні матриці похибок БІНС та ГНСС. Вихідними даними є оптимальні оцінки координат, швидкості та орієнтації об'єкта.

Запишемо спочатку рівняння фільтра Калмана. Вектори похибок БІНС позначимо так: μ – вектор малого повороту похибки визначення орієнтації, $\delta\mathbf{v}, \delta\mathbf{r}$ – вектори похибок визначення швидкості та координат об'єкта. Вектор повного прискорення позначимо як $\tilde{a} = [\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3]^T$. Рівняння зміни похибок БІНС беремо в такій формі [13]:

$$\dot{x} = Fx + n, \tag{1}$$

де $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mu \\ \delta\mathbf{v} \\ \delta\mathbf{r} \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{a}_3 & \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_3 & 0 & -\tilde{a}_1 \\ -\tilde{a}_2 & \tilde{a}_1 & 0 \end{bmatrix}$, n – вектор випадкових похибок роботи БІНС; $0, I$ – нульова та одинична матриці розмірністю 3х3. Дискретний аналог рівняння (1) через малий інтервал часу Δt має такий вигляд:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_k; \quad \Phi_k = I + F\Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2} F^2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ C \cdot \Delta t & I & 0 \\ C \cdot \frac{(\Delta t)^2}{2} & I \cdot \Delta t & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

У момент приймання від ГНСС інформації про оцінку швидкості та координати об'єкта має місце такий процес вимірювань:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \xi_k; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \tag{3}$$

де $\mathbf{z}_k = [v_{GPS} \quad r_{GPS}]^T$ – вектор поточного вимірювання від ГНСС, $\mathbf{H}$ – матриця вимірювань, $\mathbf{x}_k$ – вектор стану, ξ_k – вектор похибок вимірювань; $0, I$ – нульова та одинична матриці розмірністю 3х3. Власне задача корекції БІНС має такий вигляд [13]:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}_k), \quad \bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_k, \tag{4}$$

Рівняння фільтра Калмана, що генерують вектор оптимальної оцінки $\hat{\mathbf{x}}_k$:

$$K_k = P_k(-)H^T\left(HP_k(-)H^T + R_k\right)^{-1}; \tag{5}$$

$$P_{k+1}(-) = \Phi_k P_k(+)\Phi'_k + Q_k^T; \tag{6}$$

$$P_k(+) = P_k(-) - K_k\left(HP_k(-)H^T + R_k\right)K_k^T. \tag{7}$$

Тут матриці $\mathbf{Q}_k$, $\mathbf{R}_k$ є коваріаційними матрицями похибок $\mathbf{n}_k$ у рівняннях зміни похибок БІНС (2) та ξ_k у рівнянні вимірювань (3) відповідно.

Основною проблемою використання калманівської фільтрації в інтегрованій навігаційній системі є забезпечення збіжності обчислень. Суттєвою особливістю є те, що коваріаційна матриця змінних стану P є погано обумовленою, а матриці Ф і Н в описаних вище рівняннях фільтрації утворюють не повністю спостережувану пару [12]. Ці обставини потребують підвищення точності обчислювальних процедур для забезпечення збіжності обчислювань калманівської фільтрації. Тому в інтегрованій навігаційній системі використано алгоритм отримання множників Холецького відповідних коваріаційних матриць [12, 13].

Обертання матриць в інтегрованій навігаційній системі. Оскільки в результаті факторизації отримуються трикутні матриці, то і всі обрахунки потім виконуються з ними. Процедура обертання матриці є процедурою, що потребує значних обчислень і яку не завжди можна уникнути в алгоритмах фільтрації. Проте кількість цих обчислень можна скоротити, якщо мова йде про трикутні матриці, оскільки обернена до трикутної матриця є теж трикутною. В даній роботі пропонується використати алгоритм обертання верхньої одиничної трикутної матриці [3], блок-схема якого представлена на рис. 2. У даному алгоритмі верхня одинична трикутна матриця перезаписується оберненою до неї. Кількість необхідних операцій для обертання матриці визначається у [3] як $m \cdot (m-1) \cdot (m-2)/6$.

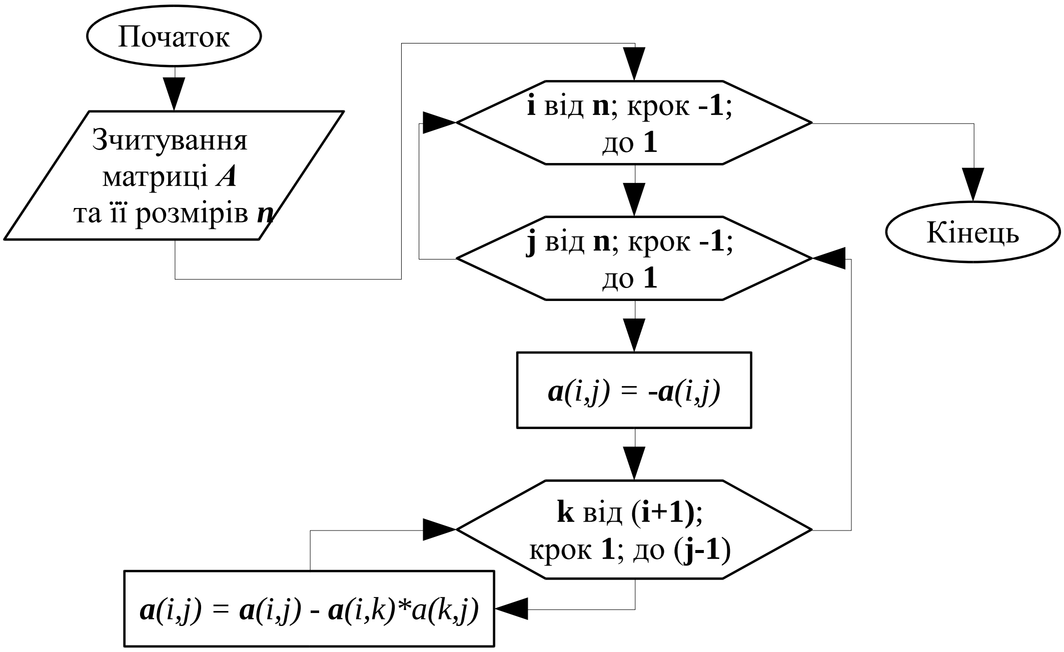

Рис. 2 – Блок-схема алгоритму обертання верхньої одиничної трикутної матриці

Для оцінки швидкодії та точності досліджуваних методів (Гауса, Жордана-Гауса та запропонованого) знаходження оберненої матриці було написано відповідні функції у програмному середовищі Code Warrior для мікропроцесора Freescale Kinetis K-60 [14] і апробовано на тестовій трикутній матриці розміром 9x9, яка є типовою в обчисленнях інтегрованої навігаційної системи.

Для оцінки швидкодії функцій було використано таймер із запрограмованим періодичним інтервалом уривання (англ. Periodic Interrupt Timer, PIT) [14]. Отримано такі результати: метод Гауса – 475 відліків, Жордана-Гауса – 305, запропонований метод – 90.

Оскільки будь-які чисельні методи знаходження оберненої матриці мають певні похибки через заокруглення та інші ефекти, то у результаті множення оберненої матриці на вихідну вийде матриця, наближена до одиничної. Для оцінки точності застосованих алгоритмів обертання матриці розраховуємо норму матриці похибок Q, яка в ідеалі має дорівнювати нулю:

$$err\_norm = \|Q\|_{(2)} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left| q_{i,j} \right|^2 \right\}^{1/2}; \tag{8}$$

$$Q = E - \hat{E}; \quad \hat{\mathbf{E}} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}. \tag{9}$$

Отримано такі значення норми матриць похибок: метод Гауса – 6.0913e-08, Жордана-Гауса – 8.4336e-08, запропонований метод – 6.0106e-08.

Висновки. В роботі проведено аналіз деяких відомих методів знаходження обернених матриць. Методи Гауса, Жордана-Гауса та запропонований метод обертання трикутної матриці було реалізовано у вигляді функцій у програмному середовищі Code Warrior для мікропроцесора Freescale Kinetis K-60 і апробовано на тестовій трикутній матриці. У результаті було визначено, що порядок точності зберігається приблизно таким же для всіх методів, а за швидкодією запропонований метод дає виграш приблизно у 70 – 80 % у порівнянні з класичними методами Гауса та Жордана-Гауса відповідно. Подальші дослідження будуть спрямовані на методи факторизацій матриць та швидкодію інтегрованих навігаційних систем у цілому.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Конин В. В. Системы спутниковой радионавигации / В. В. Конин, В. П. Харченко; Национальный авиационный университет. – К. : Холтех, 2010. – 520 с.

2. Hofmann-Wellenhof B. GNSS – Global Navigation Satellite Systems. GPS, GLONASS, Galileo, and more // B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, E. Wasle – Springer-Verlag Wien, 2008. – 516 p.

3. Grewall M. S. Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration / M. S. Grewall, L. P. Weill, A. P. Andrews. – A John Wiley & Sons, Inc. Publ., New York, Chichester, Brisbane, Singapore, Toronto. – 2001. – 392 p.

4. George M. Siouris. Aerospace Avionics Systems: a modern synthesis. – Academic Press, Inc., 2007. – 466 p.

5. Kharchenko V. Multipurpose Remotely Piloted Aircraft System Integrated Navigation System Development and Testing / V. Kharchenko, S. Ilnytska // Logistic and Transport Journal. – V. 19, № 3, 3013. – pp. 85-90.

6. Coopmans C. AGGIEAIR: An Integrated and Effective Small Multi-UAV Command, Control and Data Collection Architecture / C. Coopmans, Y. Han // Proceedings of the ASME IDETC/CIE, 2009. – pp. 1-7.

7. Krishnamoorthy A. Matrix Inversion Using Cholesky Decomposition / A. Krishnamoorthy, D. Menon // Proceedings of the IEEE Conference «Signal Processing: Algorithms, Architectures, Arrangements, and Applications (SPA)», 26-28 Sept. 2013. – pp. 70-72.

8. Soleymani F. A Rapid Numerical Algorithm to Compute Matrix Inversion / Soleymani F. // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, vol. 2012, Article ID 134653, 2012. –11 pages. – doi:10.1155/2012/134653

9. Bertsekas D. P., Tsitsiklis J. N. Paralel and Distibuted Computation: Numerical Methods. – Athena Scientific, 1997. – 718 p.

10. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения / Г. Стренг. – М. : Мир, 1980. – 460 с.

11. Белоусов И. В. Матрицы и определители: учебное пособие по линейной алгебре / И. В. Белоусов. – Кишинев, 2006. – 101 с.

12. Larin V. B. Attitude-Determination Problems for a Rigid Body // Int. Appl. Mech. – 2001.– 37. – №7. – pp. 870-898.

13. Ларин В. Б. О корректировании работы системы инерциальной навигации / В. Б. Ларин, А. А. Туник // Проблемы управления и информатики. – 2010. – № 4. – С. 130-142.

14. Freescale Kinetis K60 Sub-Family Reference Manual, Rev. 2, Dec 2011. – 2075 p.

Ильницкая С.И. ПОВЫШЕНИЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ РАСЧЕТОВ ИНТЕГРИРОВАННОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ЗА СЧЕТ ЭКОНОМНОГО МЕТОДА ОБРАЩЕНИЯ МАТРИЦ

Несмотря на большое количество публикаций, посвященным интегрированным навигационным системам и методам вращения матриц, мало внимания уделяется техническим аспектам вопроса быстродействия таких систем. Основной целью данной работы является исследование возможностей повышения быстродействия вычислений в интегрированной навигационной системе путем использования улучшенной процедуры вращения треугольных матриц. В результате практической реализации методов Гаусса, Жордана-Гаусса и предложенного метода вращения треугольной матрицы в виде функций в программной среде Code Warrior на микропроцессоре серии Freescale Kinetis K-60 было определено, что порядок точности сохраняется примерно таким же для всех методов, а по быстродействию предложенный метод дает выигрыш примерно в 70–80% по сравнению с классическими методами Гаусса и Жордана-Гаусса соответственно. Данные результаты могут также быть использованы при программировании алгоритмов интегрированных навигационных систем в конкретном аппаратном обеспечении. В частности, в нашем случае было решено остановиться именно на предложенном методе вращения треугольных матриц.

Ключевые слова: *интергированные навигационные системы, метод вращения треугольных матриц.*

Ilnitska S.I. THE WAY TO INCREASE THE PERFORMANCE OF INTEGRATED NAVIGATION SYSTEM DUE TO ECONOMIC METHOD OF FINDING THE MATRIX INVERSE

Despite the large number of publications devoted to integrated navigation systems and methods of finding the matrice inverse, little attention is paid to the technical aspects of the issue of such systems performance. The main goal of this work is to study the possibilities of improving the performance of calculations in an integrated navigation system using improved procedures for finding the inverse of triangular matrices. As a result of the practical realization of Gauss, Gauss-Jordan method and the proposed method of finding the inverse of triangular matrices as functions programmed in Code Warrior on a microprocessor from Freescale Kinetis K-60 series, it has been determined that the order of accuracy is approximately the same for all methods, but the performance of the proposed method gives the gain at about 70 -80% compared with the classical methods of Gauss and Gauss-Jordan respectively. These results can also be used for programming algorithms of integrated navigation systems in a concrete hardware. In particular, in our case it has been decided to choose the proposed method of finding the inverse of triangular matrices.

Keywords: *integrated navigation system, a method of rotating triangular matrices.*

Статтю прийнято
до редакції 1.10.14