УДК 629.5.01

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ШТРАФНОЙ ДОБАВКИ В ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ПОИСКА ГЛАВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СУДНА

Кабанова Н.Н.,
Национальный университет кораблестроения им. адмирала Макарова, г. Николаев

Проанализированы виды штрафных добавок к оптимизируемой целевой функции. Путем сравнения предложен наилучший вариант добавки, обеспечивающий отсутствие овражного рельефа поверхности оптимизируемой функции.
Ключевые слова: штрафная добавка, целевая функция, оптимальное решение.

Постановка задачи. Как известно, штрафная добавка (ШД) применяется для сведения оптимизационной задачи с ограничениями к безусловной. Это достигается путем добавления «штрафа» на оптимизируемый критерий эффективности. Таким образом, оптимизируется целевая функция (ЦФ), являющаяся результатом сложения исходной функции и штрафной добавки.

Одним из методов решения задач такого рода является метод Пауэлла. Однако данный метод плохо работает на функциях, имеющих ярко выраженный овражный рельеф. Поскольку вне области допустимых значений величина ШД намного больше ЦФ, форма новой поверхности в основном определяется ШД, и следовательно, ее вид имеет ключевое значение для успешного применения алгоритма оптимизации.

Анализ последних достижений и публикаций показал развитие направления оптимизационного проектирования судов, обеспечивающее их большую конкурентоспособность. Для решения оптимизационных задач, как правило, используются методы нелинейного программирования, в частности метод Пауэлла, рассмотренный в работе [1]. Для сведения задачи с ограничениями к безусловной, могут применяться методы барьерных и штрафных функций [1-3].

Выделение нерешённых ранее частей общей проблемы. В задаче оптимизационного проектирования судна выбор типа штрафной функции недостаточно изучен; неправильный ее выбор может привести к овражному рельефу оптимизируемого критерия, и, как следствие, – к получению искаженного результата.

Цель работы состоит в выборе типа штрафной добавки для оптимизационной задачи таким образом, чтобы поверхность модифицированной функции наилучшим образом подходила для ее решения методами нелинейного программирования [2].

Изложение основного материала. Проектирование судна сопряжено с решением задачи выбора характеристик, обеспечивающих наиболее эффективное выполнение функциональных операции при его эксплуатации. При этом необходимо выполнить ряд условий, представленных системой соответствующих тривиальных и функциональных ограничений. Таким образом, задача сводится к виду:

$$f(\overline{x}) \to \min, \qquad (1)$$

где $f(\overline{x})$ – оптимизируемая ЦФ; $\bar{x}$ – вектор независимых переменных.

На выражение (1) накладывается система n линейных или нелинейных ограничений в виде неравенств.

Как правило, задача (1) решается методами нелинейного программирования. Это достигается путем использования штрафных функций [3], позволяющих свести оптимизационную задачу с ограничениями к безусловной. Таким образом, оптимизации подлежит новый критерий:

$$f\ \ (\overline{x}) = f(\overline{x}) + P(\bar{x}), \qquad (2)$$

где $P(\overline{x})$ – штрафная функция.

Штрафная функция в (2) может иметь различную математическую форму. В зависимости от этого различают методы внутренней (барьерная функция) и внешней точки (штрафная функция). Примером барьерной функции является:

$$P(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{g_i(x)},$$

где g_i – штрафная добавка, которая при нарушении ограничений ухудшает значение *Ф*. К минусам рассмотренной добавки можно отнести невозможность получения результата при выходе точки из области допустимых значений. Для решения этой проблемы в [1] предложено введения условного перехода, вследствие чего добавка примет вид [1]:

$$P(\overline{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{g_i(x)} & \text{ïðè} \quad g_i(x) \geq \varepsilon \\ \dfrac{[2\varepsilon - g_i(x)]}{\varepsilon^2} & \text{ïðè} \quad g_i(x) < \varepsilon \end{cases},$$

где ε – положительная малая величина.

Однако, как показывает практика, при необходимости выполнения большого количества ограничений, выбор ε сопряжен с трудностями.

В задаче оптимизационного проектирования судна широкое применение нашла безразмерная нормализованная штрафная функция:

$$P(\overline{x}) = r_k \sum_{i=1}^{n} \left[(g_i(x))^2 \right], \qquad (3)$$

где r_k – штрафной коэффициент, регулирующий скорость возрастания суммарного штрафа; штрафная добавка:

$$g_i(x) = \begin{cases} \dfrac{c-x}{x} & \text{ïðè} \quad \dfrac{c-x}{x} \le 0 \\ 0 \quad \text{ïðè} & \dfrac{c-x}{x} > 0 \end{cases} . \qquad (4)$$

В выражении (4): x – параметр, на который накладывается ограничение; c – значение ограничения.

Однако (4) также, как и предлагаемая в [1], является барьерной.

Рассмотрим пример использования выражения (4). Пусть поставлено тривиальное ограничение $c \le 5$, при $r_k = 3$, тогда графически штрафная добавка $g(x)$ примет вид, представленный на рисунке 1.

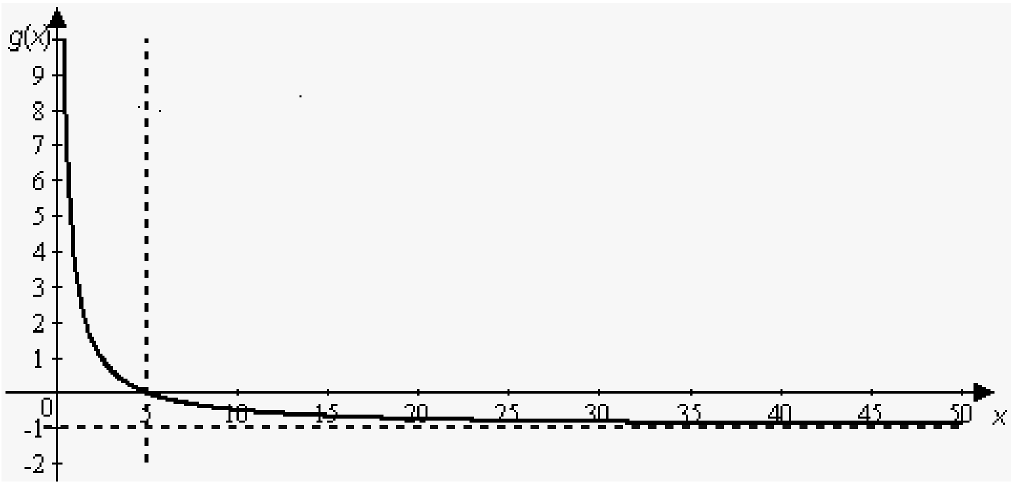

Рисунок 1 – Зависимость штрафной добавки от значения переменной, на которую накладывается ограничение

Как видно из рисунка 1, на границе ограничения график функции пересекает ось x и выходит в отрицательную область, ассиметрично приближаясь к границе $g(x) = -1$. Данная форма легко объясняется, если функцию привести к виду:

$$g(x) = \frac{c-x}{x} = \frac{c}{x} - \frac{x}{x} = \frac{c}{x} - 1.$$

Таким образом, при $x \to \infty$ выполнится условие $\dfrac{c}{x} \to 0$ и как следствие $g(x) \to -1$.

Штрафная функция (3) же примет вид, представленный на рисунке 2.

Анализ зависимости показал, что после перехода допустимой границы $c = 5$ для функции выполняется условие:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{x} = r_k . \qquad (5)$$

Таким образом, при применении $P(\overline{x})$ рассматриваемого типа может возникнуть случай, когда скорость убывания ЦФ станет выше скорости возрастания штрафной функции. Попытка решить данную проблему увеличением r повлечет лишь увеличение «крыла» функции.

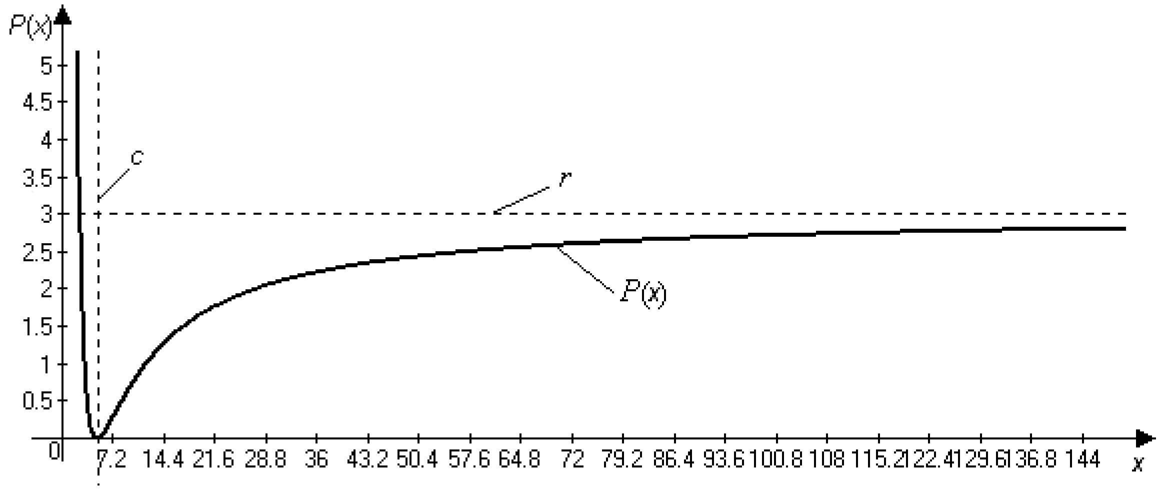

Рисунок 2 – Зависимость штрафной функции от значения переменной, на которую накладывается ограничение

Как известно, выбор типа штрафной добавки зависит от характера поверхности оптимизируемой функции. При этом необходимо помнить, что поиск ведется по модифицированной поверхности (МП), аналитически задаваемой выражением (2).

Одним из множества ограничений в задаче проектирования судна является невязка уравнения плавучести:

$$eps = 100\left|\frac{C_b LBd\,\gamma - \sum_{i=1}^{n} G_i}{C_b LBd\,\gamma}\right| \le 0{,}5\,,$$

где C_b, L, B, d – соответственно коэффициент общей полноты, длина, ширина, осадка судна, G_i – значение i-го раздела нагрузки масс судна, n – количество наименований разделов масс судна, γ – плотность морской воды.

Диапазон изменения невязки, по сравнению с другими ограничениями, значительно больше. Ряд опытов показал, что в процессе решения оптимизационной задачи данный параметр может принимать значение eps = 400. Поскольку скорость роста функции в направлении максимального изменения данного ограничения значительно больше, чем в других, возникает случай овражной функции (рис. 3). Использование метода Пауэлла для поиска экстремума в этом случае, сопряжено с трудностями. Связано это с тем, что дно модифицированной функции будет иметь вид наклоненной площадки; а поскольку ее наклон мал, и в окрестности дна поверхность имеет крутые края, метод Пауэлла не сможет определить глобальный оптимум. Это означает, что при n-ом количестве запусков задачи поиска оптимума, будет получено n различных решений. Это и объясняет получение неустойчивого оптимального результата.

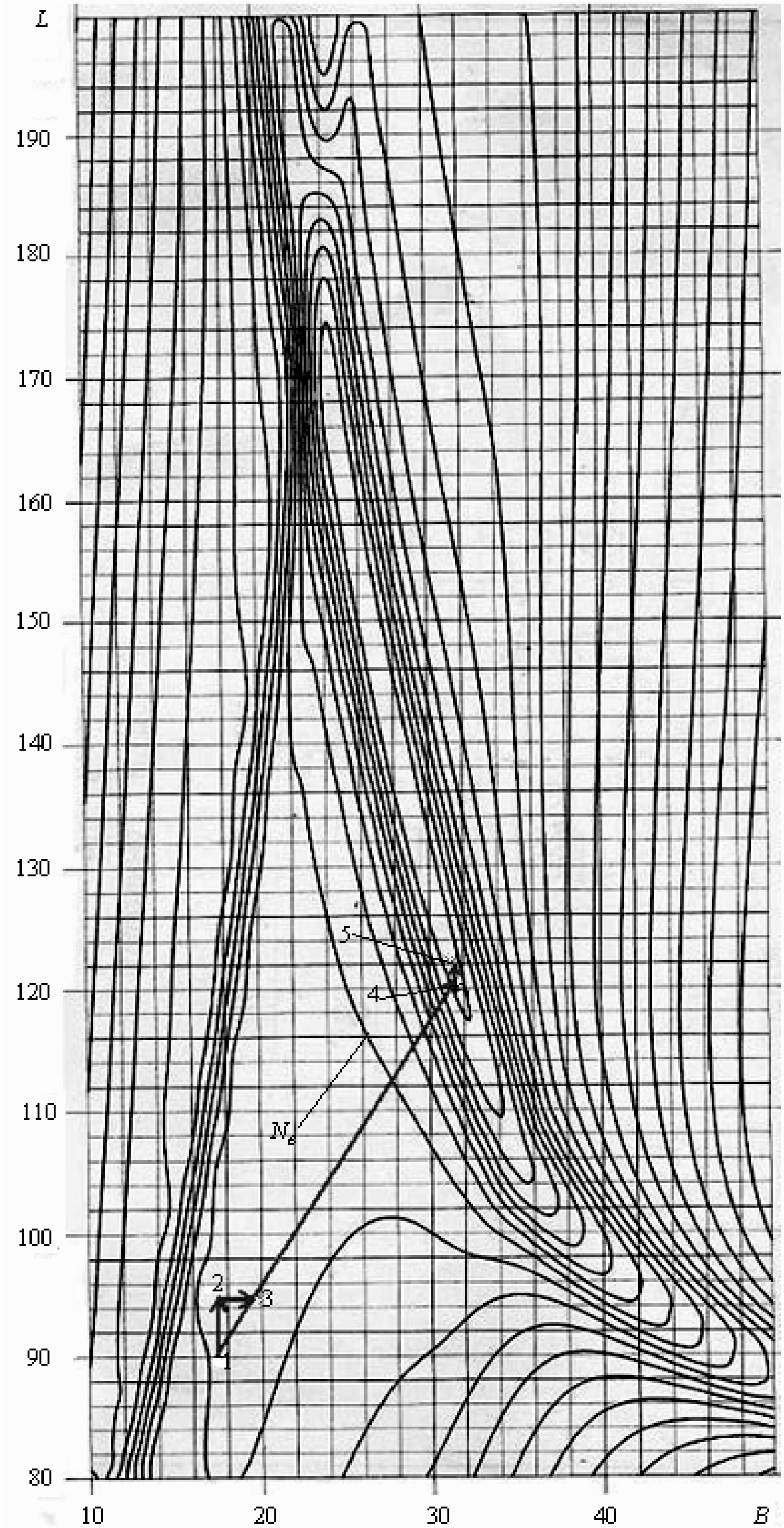

Рисунок 3 – Пример работы метода Пауэлла на овражной функции

На рисунке 3 представлены линии уровня поверхности $N_e = f(L,B) + P(\bar{x})$, где N_e, L, B – соответственно мощность СЭУ, длина и ширина судна.

Использование (3) влечет за собой условия:

а) чем дальше от границы допустимых значений находится переменная, тем большее значение приобретает штрафная добавка. Однако с учетом (5) на определенном участке скорость увеличения $P(\bar{x})$ будет несущественна, а это значит, что в этом случае на указанном промежутке $\frac{\partial P(x)}{\partial x} \to 0$. Таким образом, роль играет наклон ЦФ, а не величина штрафной добавки;

б) в то же время незначительное нарушение ограничения повлечет резкое увеличение $P(\bar{x})$.

Анализируя вышеуказанные особенности (3), можно сделать вывод о сложности ее применения. Эта проблема может быть решена путем изменения вида штрафной добавки к виду:

$$g_i(x) = \begin{cases} k_i\left(c_i(x) - z_i^{\min}\right) & \text{ïðè} \quad c_i(x) - z_i^{\min} < 0 \\ k_i\left(z_i^{\max} - c_i(x)\right) & \text{ïðè} \quad z_i^{\max} - c_i(x) < 0 \\ 0 \quad \text{ïðè} \quad c_i(x) - z_i^{\min} \geq 0 \\ 0 \quad \text{ïðè} \quad z_i^{\max} - c_i(x) \geq 0 \end{cases},$$

где k_i – коэффициент управления штрафной добавкой; $c_i(x)$ – параметр, на которое накладывается ограничение; $z_i^{\max}$, $z_i^{\min}$ – соответственно максимальное и минимальное допустимые значения ограничений;

Штрафная функция сведется к виду:

$$P_i(x) = r_k \ln\left[\sum_{i=1}^{n} |g_i(x)|^p + a\right], \tag{6}$$

где p – показатель степени штрафной добавки, a = 1 – параметр, обеспечивающий нахождение (6) в ОДЗ:

$$\sum_{i=1}^{n} |g_i(x)|^p \uparrow \Rightarrow \ln\left(\sum_{i=1}^{n} |g_i(x)|^p + 1\right) \uparrow$$

по .

$$\text{ïðè} \ \sum_{i=1}^{n} |g_i(x)|^p = 0, \ln\left(\sum_{i=1}^{n} |g_i(x)|^p + 1\right) = \ln(0+1) = \ln(1) = 0$$

В выражение (6) введен логарифм для удобства восприятия графического изображения модифицированной функции, в окрестности которой ведется поиск экстремума. Таким образом, решается проблема стремительного возрастания функции по оси ординат.

Повышение степени (p) влечет за собой более пологую форму графика, тем самым давая возможность регулировки дна оптимизируемой поверхности (рис. 4).

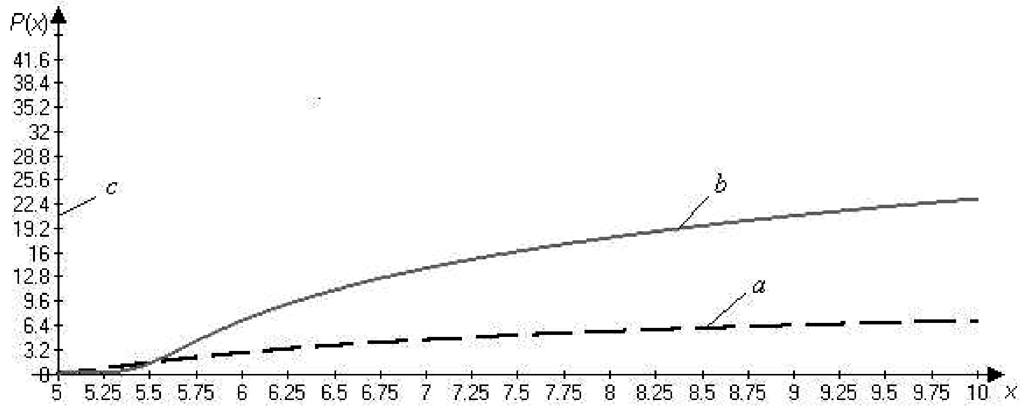

Рисунок 4 – Влияние степени штрафной добавки (p) на форму $P(x)$: a – $P(x)=2\ln\left[\left|2(5-x)\right|^{1.5}+1\right]$; b – $P(x)=2\ln\left[\left|2(5-x)\right|^{5}+1\right]$; c=5 – ограничение на $P(x)$

Монотонно возрастающая функция может управляться коэффициентами k, r, регулирующими плавность ее возрастания (рис. 5, 6).

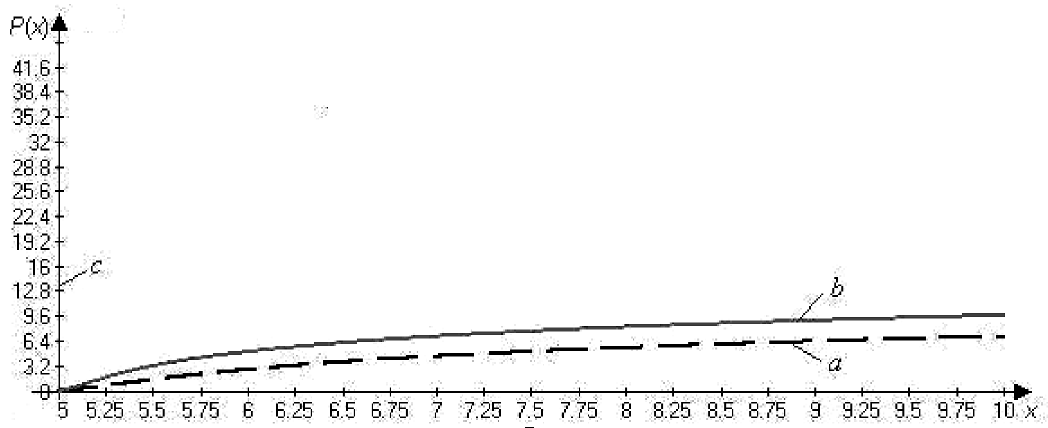

Рисунок 5 – Влияние коэффициента штрафной добавки (k) на форму $P(x)$: a – $P(x)=2\ln\left[\left|2(5-x)\right|^{1.5}+1\right]$; b – $P(x)=2\ln\left[5\left|(5-x)\right|^{1.5}+1\right]$; c=5 – ограничение на $P(x)$

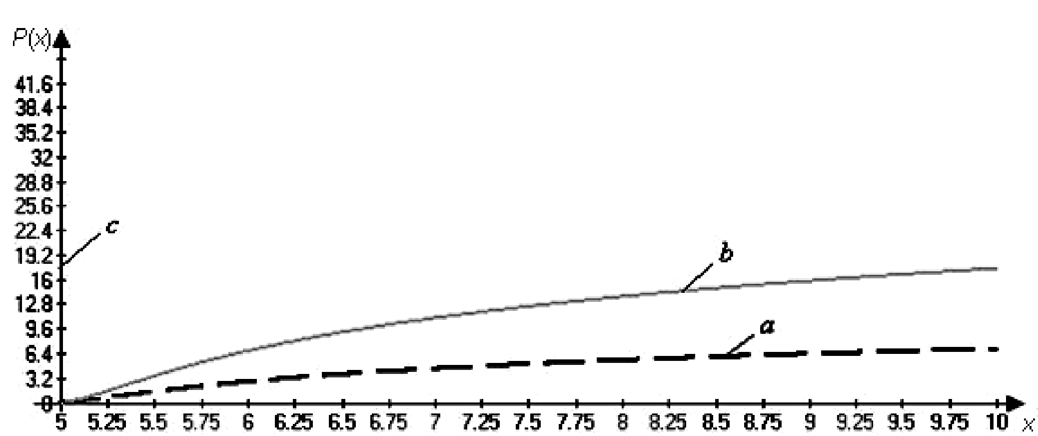

Рисунок 6 – Влияние коэффициента штрафной функции (r) на форму $P(x)$: a – $P(x)=2\ln\left[\left|2(5-x)\right|^{1.5}+1\right]$; b – $P(x)=5\ln\left[2\left|(5-x)\right|^{1.5}+1\right]$; c=5 – ограничение на $P(x)$

В отличие от (3), модифицированная штрафная функция (6), путем варьирования соответствующих коэффициентов, позволяет обеспечить плавность поверхности, вдоль которой ведется поиск оптимального решения и отсутствие на ней оврагов. Тем самым обеспечивается возможность беспрепятственного применения известного метода Пауэлла.

Вывод. Для рассматриваемого решения рассматриваемой оптимизационной задачи, целесообразно использование штрафной добавки вида (6), как обеспечивающей управление модифицированной поверхностью путем вариации коэффициентов и степени штрафной функции и как следствие получение гладкой поверхность, в окрестности которой ведется поиск оптимального решения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вашедченко А. Н. Автоматизированное проектирование судов / А. Н. Вашедченко – Л. : Судостроение, 1985. – 159 с.

2. Mokhtar S. Bazaraa Nonlinear Programming: theory and algorithms / Mokhtar S. Bazaraa, Hanif D. Sherali, C. M. Shetty. – 3rd ed., 2006. – 853 p.

3. Трифонов А. Г. Постановка задачи оптимизации и численные методы ее решения [электронный ресурс] / А. Г. Трифонов – режим доступа : http://matlab.exponenta.ru/optimiz/book2/index.php.

Кабанова Н.М. ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ ШТРАФНОЇ ДОБАВКИ В ОПТИМІЗАЦІЙНІЙ ЗАДАЧІ ПОШУКУ ГОЛОВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ СУДНА
Проаналізовано види штрафних добавок до оптимізованої цільової функції. Шляхом порівняння запропоновано найкращий варіант добавки, який забезпечує відсутність яружного рельєфу поверхні оптимізованої функції.
Ключові слова: штрафна добавка, цільова функція, оптимальне рішення.

Kabanova N.M. APPLICATION'S FEATURES OF THE PENALTY SUPPLEMENT IN THE ORGANIZATION PROBLEM OF FINDING THE MAIN PARTS OF THE SHIP
The types of penalty supplements for optimized objective function are analyzed. The best variant of supplement is proposed which was obtained by comparison. The condition for choosing was the absence of ravine surface relief.
Keywords: penalty supplement, objective function, optimal solution.