МОРСЬКИЙ ТА РІЧКОВИЙ ТРАНСПОРТ

УДК 539.3:[629.12+626.75]

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ УСИЛИЙ В БУКСИРНОМ ТРОСЕ

Алексенко В.Л., Буханистая М.В., Мамышев Н.И.,
Херсонский государственный морской институт

Введение. Прочность – важнейшее эксплуатационное качество судов и других инженерных сооружений. Вместе с другими мореходными качествами обеспечивает надежность судна, а в сочетании с искусством судовождения – и саму безопасность мореплавания. Поэтому решение и уточнение задач прочности судов и элементов их устройств представляют научный и практический интерес. Комплексное решение задачи прочности включает: последовательное во взаимном соответствии точности определение внешних сил, внутренних сил и нормирования последних.

Ниже, в уточнённой постановке, рассматривается задача о продольном ударе по упругому стержню с распределённой массой, идеализирующая в определённых рамках задачу определения усилий в буксирном тросе при буксировке и кантовках в порту.

Постановка задачи. Рассматривается изолированная механическая система (рис. 1), включающая материальные точки массами M_1 и M_2 и линейно-упругий стержень с жесткостью на растяжение – сжатие k и массой M_3, равномерно распределённой на его длине *l*. Стержень прикреплен к покоящейся массе M_1 и испытывает продольный удар со стороны M_2, которая вплоть до контакта равномерно движется относительно M_1 со скоростью v_0.

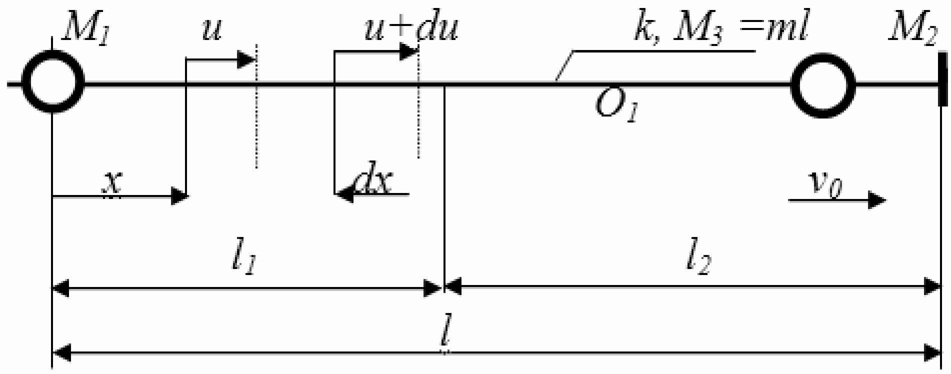

Рисунок 1. Схема продольного удара

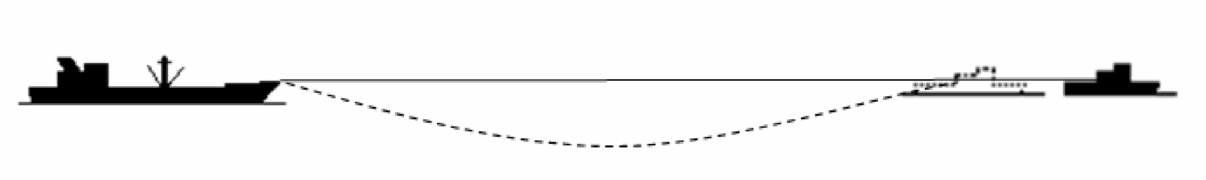

Рисунок 2. Рывок при буксировке

Практическое значение. К данной расчетной схеме можно свести задачу о рывке при буксировке [2, 3] в момент распрямления прослабленного троса (рис. 2). Такая постановка задачи позволяет уточнить существующее решение [2, с. 79], в котором левый конец стержня полагается жестко закреплённым.

Цель исследования. Требуется исследовать движение заданной механической системы с упругим элементом и определить динамические продольные усилия в последнем.

Решение задачи в упрощенной постановке. Предварительно рассмотрим случай, когда $M_3 << M_1$, т. е. массой буксирного троса и силами инерции в нем будем пренебрегать.

Задачу решаем в инерциальной системе координат O_1X, с началом в центре масс O_1, совершающим равномерное прямолинейное движение со скоростью:

$$v_1 = \frac{M_2 v_0}{M_1 + M_2} \tag{1}$$

относительно неподвижной точки O.

В момент удара t = 0 центр инерции расположен так, что:

$$l_1 = \frac{M_2 l}{M_1 + M_2}; \qquad l_2 = \frac{M_1 l}{M_1 + M_2}. \tag{2}$$

Обозначив через u перемещения по оси OX поперечных сечений стержня, а точками и штрихами вверху соответственно производные по t и x, получим:

до удара скорости точек относительно O_1:

$$u_1^{'}(t) = -v_1 = -M_2 v_0 /(M_1 + M_2); \; u_2^{'}(t) = v_0 - v_1 = M_1 v_0 /(M_1 + M_2). \tag{3}$$

Уравнения движения с момента удара ($t \geq 0$):

$$M_1 \ddot{u}_1(t) = -k u_1^{'}; \; M_2 \ddot{u}_2(t) = -k u_2^{'}; \tag{4}$$

где в силу принятых предположений:

$$u' = u_1' = u_2' = (u_2 - u_1)/l = u_1/l_1 = u_2/l_2 \tag{5}$$

могут быть представлены в виде:

$$\ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = 0; \quad \ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = 0. \tag{6}$$

Здесь $\omega_1 = \sqrt{(k/M_1 l_1)}$; $\omega_2 = \sqrt{(k/M_2 l_2)}$, причем $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. (7)

Начальные условия:

$$u_1(0) = 0;\quad u_1'(0) = -M_2 v_0/(M_1 + M_2);$$
$$u_2(0) = 0;\quad u_2'(0) = -M_1 v_0/(M_1 + M_2). \qquad (8)$$

Решения первого из уравнений (4):

$$u_1 = A_1 \sin\omega t + B_1 \cos\omega t. \qquad (9)$$

Из первого начального условия следует, что $B_1 = 0$.

Из второго:

$$A_1 = -M_2 v_0/(M_1 + M_2)\omega. \qquad (10)$$

Таким образом,

$$u_1(t) = A_1 \sin\omega t\ , \qquad (11)$$

где ω и A_1, определятся формулами (7) и (10).

Аналогично:

$$u_1(t) = A_1 \sin\omega t\ , \qquad (12)$$

где

$$u_2(t) = A_2 \sin\omega t. \qquad (13)$$

Усилие в тросе $S = k(u_2 - u_1)/l$, или с учетом (11) и (12):

$$S(t) = S_0 \sin\omega t, \qquad (14)$$

где:

$$S_0 = kv_0/\omega l. \qquad (15)$$

Следовательно, с момента удара (t=0) система превращается в два гармонических осциллятора, точечные массы которых колеблются относительно центра инерции с одинаковой круговой частотой ω, но в противоположных направлениях.

Если стержень M_3 – гибкая упругая нить (трос), то он не сможет воспринимать сжимающие усилия. Поэтому, если за системой просматривать задачу о буксировке, уравнения движения (6) и их решения (11)-(15) будут верны только для положительных (растягивающих) значений S(t).

Решение в уточнённой постановке. Решим рассматриваемую задачу с учетом распределённой массы $M_3 = ml$ упругого стержня.

Уравнение смещений u(x,t) точек стержня в неподвижной системе координат OX имеет вид [1, 2]:

$$\partial^2 u(x,t)/\partial t^2 = c^2 \partial^2 u(x,t)/\partial x^2, \quad \text{где } c = \sqrt{\frac{kl}{m}}\ . \qquad (16)$$

Введя безразмерные величины:

$$\xi = x/l;\ \tau = ct/l;\ \bar{u} = u/l;\ \alpha_1 = M_1/M_3;\ \beta_0 = v_0/c \tag{17}$$

и обозначив дифференцирование по ξ и τ нижними индексами, получим:

$$\bar{u}_{\xi\xi} = \bar{u}_{\tau\tau}\ , \tag{18}$$

при начальных:

$$\bar{u}_\xi(0,\tau) - \alpha_1\bar{u}_{\tau\tau}(0,\tau) = 0 \tag{19}$$

$$\bar{u}_\xi(1,\tau) - \alpha_2\bar{u}_{\tau\tau}(1,\tau) = 0 \tag{20}$$

и граничных:

$$\bar{u}(\xi,0) = 0 \tag{21}$$

$$\bar{u}_\tau(\xi,0) = \beta(\xi) \tag{22}$$

$$\beta(\xi) = \begin{cases} 0 & 0 < \xi < 1-\delta \\ \beta_0 & 1-\delta < \xi < 1 \quad \delta \to 0 \end{cases} \tag{23}$$

условиях.

Решение (18) ищем в виде [1]:

$$\bar{u}(\xi,\tau) = X(\xi)T(\tau)\,. \tag{24}$$

Подставляя (24) в (18), получим $X_{\xi\xi}T = XT_{\tau\tau}$, или:

$$X_{\xi\xi}/X = T_{\tau\tau}/T = -\gamma^2\,, \tag{25}$$

где γ = const.

Откуда следуют два обыкновенных однородных дифференциальных уравнения

$$X_{\xi\xi} + \gamma^2 X = 0\,, \tag{26}$$

$$T_{\tau\tau} + \gamma^2 T = 0\,. \tag{27}$$

Общие решения, которых:

$$X = c_1\sin\gamma\xi + c_2\cos\gamma\xi\,, \tag{28}$$

$$T = c_3\sin\gamma\tau + c_4\cos\gamma\tau\,. \tag{29}$$

Из начального условия (21):

$$c_4 = 0. \tag{30}$$

Подставляя (28) и (29) в граничные условия (19) и (20), с учетом (30) получим систему двух однородных линейных относительно c_1 и c_2 уравнений:

$$\begin{cases} c_1 + \alpha_1\gamma c_2 = 0 \\ (\cos\gamma + \alpha_2\gamma + \alpha_2\gamma\sin\gamma)c_1 + (\alpha_2\gamma\cos\gamma - \sin\gamma)c_2 = 0 \end{cases}. \tag{31}$$

Приравнивая определитель системы к нулю, получим трансцендентное уравнение для определения собственных чисел γ_n (n= 1, 2, 3,...∞):

$$tg\gamma_n = (\alpha_2 - \alpha_1)\gamma_n /(1 + \alpha_1\alpha_2\gamma_n^2)\,. \tag{32}$$

Следовательно, для всех γ_n имеет место:

$$\frac{c_{2n}}{c_{1n}} = \frac{-1}{\alpha_1\gamma_n} = \frac{\cos\gamma_n + \alpha_2\gamma_n \sin\gamma_n}{\sin\gamma_n + \alpha_2\gamma_n \cos\gamma_n}\,. \tag{33}$$

Каждому γ_n соответствует отношение c_{2n}/c_{1n}, обращающее уравнения (31) в тождества, т. е. постоянные c_{1n} и c_{2n} определяются с точностью до постоянного множителя.

Проинтегрируем собственные функции по условию:

$$\int_0^1 X_n^2(\xi)d\xi = 1\,, \tag{34}$$

откуда:

$$c_{1n} = \frac{1}{\sqrt{[0{,}5 - \sin 2\gamma_n / 4\gamma_n + (c_{2n}/c_{1n})((1-\cos 2\gamma_n)/2\gamma_n) + (c_{2n}/c_{1n})^2(0{,}5\sin 2\gamma_n / 4\gamma_n]}}\,, \tag{35}$$

где c_{2n}/c_{1n} определяются формулой (33).

Каждая функция $\bar{u}_{1n}(\xi,\tau) = X_n(\xi)T_n(\tau) = X_n(\xi)c_{3n}\sin\gamma_n\tau$ есть решение уравнения (18) при граничных условиях (19), (20) и начальном условии (21).

Чтобы удовлетворить начальному условию (22), составим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\bar{u}(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}X_n(\xi)c_{3n}\sin\gamma_n\tau\,. \tag{36}$$

Предположим, что этот ряд и ряды, полученные из него двойным дифференцированием по ξ и τ, сходятся равномерно. В этом случае ряд (36) будет решением уравнения (18) при граничных условиях (19), (20) и начальном (21).

С учетом найденной формы решения (36) начальное условие (22) запишется:

$$\bar{u}_\tau(\xi,0) = \sum_{n=1}^{\infty}(\xi)c_{3n}\sin\gamma_n = \beta(\xi)\,. \tag{37}$$

Домножим обе части выражения (37) на $X_m(\xi)$, (m=1,2,3…∞) и проинтегрируем на отрезке [0,1]:

$$\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}X_n(\xi)c_{3n}\gamma_n)X_m(\xi)d\xi = \int_0^1\beta(\xi)X_m(\xi)d\xi\,.$$

Учитывая, что $X_n(\xi)$ образуют на отрезке [0,1] полную систему взаимно ортогональных функций и норму (34), получим:

$$c_{3n}\gamma_n \int_0^1 X_n^2(\xi)d\xi = \beta_0 \int_{1-\delta}^1 X_n(1-\delta/2)d\xi\,,$$

откуда:

$$c_{3n} = (\beta_0/\gamma_n)X_n(1) = (\beta_0/\gamma_n)[\sin\gamma_n + (c_{2n}/c_{1n})\cos\gamma_n]c_{1n}\,, \tag{38}$$

где c_{2n}/c_{1n} определяется формулой (23).

Найденное решение уравнения (18):

$$\bar{u}(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}(c_1\sin\gamma_n\xi + c_2\cos\gamma_n\xi)c_3\sin\gamma_n\tau \tag{39}$$

будет общим в пределах граничных (19), (20) и начальных (21), (22) условий. Соответственно безразмерные скорости, ускорения, и деформации определяются формулами:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_\tau(\xi,\tau) &= \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n(c_1\sin\gamma_n\xi + c_2\cos\gamma_n\xi)c_{3n}\cos\gamma_n\tau;\\
\bar{u}_{\tau\tau}(\xi,\tau) &= -\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n(c_1\sin\gamma_n\xi + c_2\cos\gamma_n\xi)c_{3n}\sin\gamma_n\tau;\\
\bar{u}_\xi(\xi,\tau) &= \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n(c_1\cos\gamma_n\xi - c_2\sin\gamma_n\xi)c_{3n}\sin\gamma_n\tau,
\end{aligned} \tag{40}$$

а размерные:

$$u_t = c\bar{u}_\tau;\ u_{tt} = c_2\bar{u}_{\tau\tau}/l;\ S = k\bar{u}_\xi\,. \tag{41}$$

Алгоритм расчёта с использованием предлагаемого решения. Из вышесказанного следует следующий порядок расчета рассматриваемой механической системы:

1. Из уравнения (32) находят собственные числа γ_1, γ_2, γ_3, …. $\gamma_{m,}$ где m определяется требуемой точностью вычислений.
2. По формуле (33) определяют c_{2n}/c_{1n} (n=1, 2,…m).
3. По формуле (35) с учетом найденных c_{2n}/c_{1n} определяют c_{1n}.
4. Вычисляют c_{2n} (формула 33) и c_{3n} (38).
5. Для ряда заданных моментов времени и точек на оси стержня по формулам (39) - (41) находят безразмерные и размерные параметры движения системы.

Результаты исследований. Найдено решение задачи о продольном растягивающем ударе по одному из концов стержня с массой, равномерно распределенной по его длине, и сосредоточенной массой на другом конце, которое может быть использовано для анализа динамических нагрузок на канат при буксировке транспортных средств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уравнения в частных производных математической физики : учебное пособие для мех.-мат. фак. ун-тов / [Кошляков Н.С. и др.]. – М. : Высшая школа, 1970. – 712 с.

2. Судовые устройства : справочник / Под ред. М.Н. Александрова. – Л. : Судостроение, 1987. – 656 с.

3. Полин Л.Е. Балтика – Черное море (перегон плавучего дока). – М. : Морской транспорт, 1963. – 141 с.